**תרגול 4 – לוגיקה עמומה**

לוגיקה עמומה היא צורה של לוגיקה מתמטית העוסקת בהיגיון המבוסס על דרגות של חברות לאלמנטים שלא מוגדרים במלואם ולא על הגדרות מוחלטות של אמת/שקר. זה מאפשר גמישות מסוימת, במיוחד בסיטואציות בהן קשה לערוך ניסויים ולהגיע לסטטיסטיקה מדויקת. חלק מהיתרונות של לוגיקה עמומה כוללים את יכולתה להתמודד עם אי-ודאות, עמימות וחוסר דיוק בנתונים.

דוגמאות:

מילים כמו "צעיר", "גבוה" , "טוב" ו-"חם" הן עמומות, מכיוון שאין מספר מדויק המגדיר אותן באופן מוחלט.

**קבוצה עמומה – Fuzzy sets:**

קבוצה עמומה היא קבוצה שבה לכל אלמנט המשתייך אליה מצומד ערך מספרי המבטא את מידת שייכותו לקבוצה.

ניתן לייצג קבוצה עמומה כך:

כאשר:

– מרחב הפתרונות.

למשל, עבור קבוצת האנשים הגבוהים (= ) – מרחב הפתרונות יהיה טווח הגבהים 1.7 – 2.2 מ'. שימו לב, לא קבענו כי אדם אשר נמצא בטווח הזה הינו אדם גבוה, אלא רק הגדרנו פתרונות אפשריים לשאלה: מי הוא אדם גבוה?

– פונקציית החברות אשר מתאימה לכל ב- את מידת הודאות/אמון לשייכותו לקבוצה.

למשל, בדוגמה הקודמת היא תיתן לכל ערך של גובה במרחב הפתרונות (לכל ב-) את מידת האמון שאותו הגובה שייך לקבוצת האנשים הגבוהים (= ).

דוגמה:

*אם כן, פונקציית חברות מבטאת התפלגות מסויימת (על אף שאינה מבטאת הסתברות, אינה נשענת על סטטיסטיקה) ויכולה להיות מסוגים שונים.*

***פונקציות חברות פופולריות:***

|  |  |
| --- | --- |
| משולש – Triangular : | |
|  |  |
| טרפז – Trapezoid: | |
|  |  |
| גאוסיאן – Gaussian: | |
|  |  |

בהינתן מערכת הלוקחת בחשבון מספר קבוצות עמומות נוכל למצוא קשרים ביניהן באמצעות אופרטורים לוגים שהפלט שלהם גם הוא עמום .

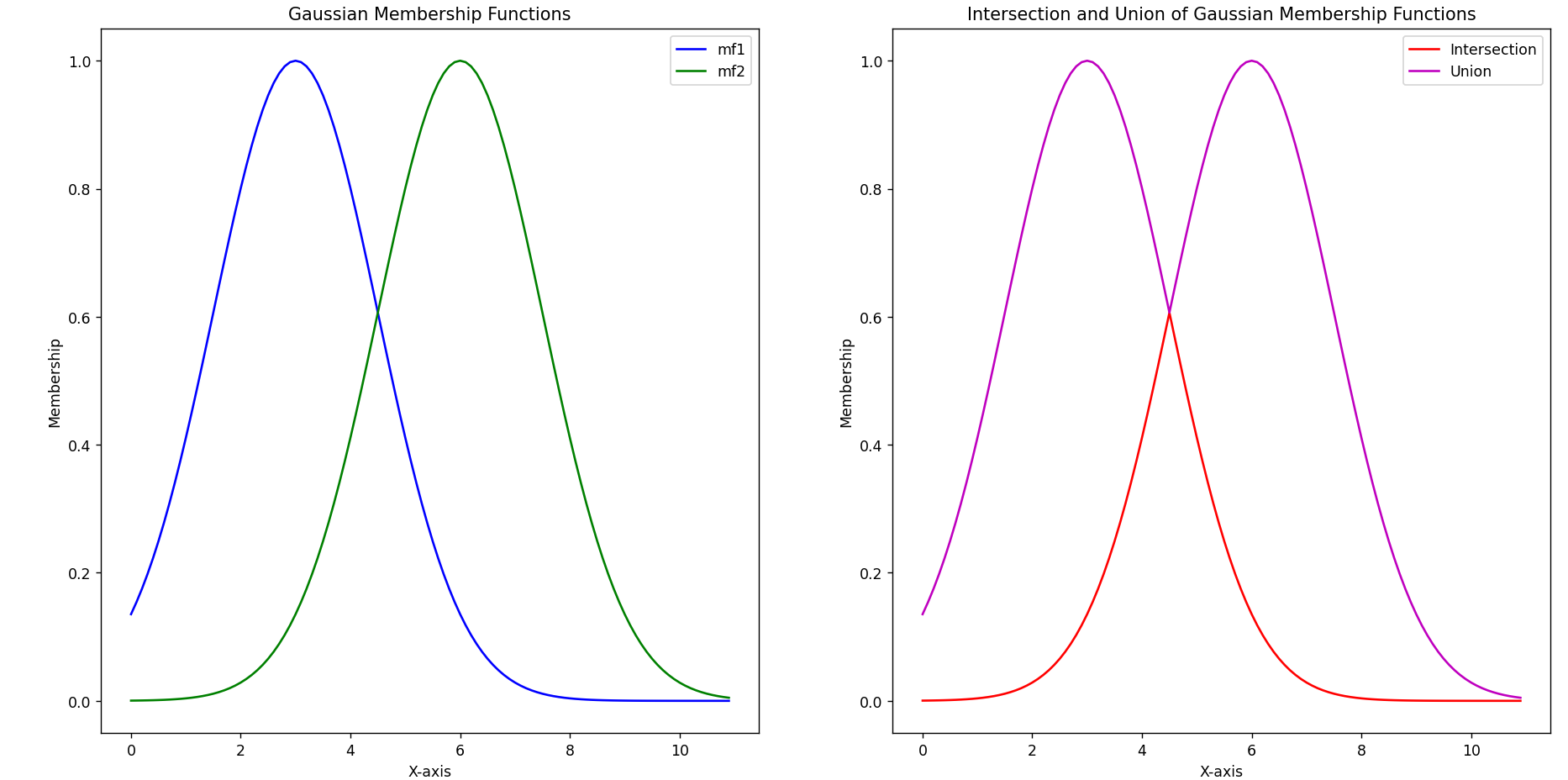
**אופרטורים מרכזיים:**

**איחוד ~ OR:** מידת האמון שהאלמנט שייך או ל-A או ל-: B

" If **OR** "

**חיתוך ~ AND:** מידת האמון שהאלמנט שייך גם ל-A וגם ל-B**:**

" If **AND** "

****

בלוגיקה הקלאסית עבור אופרטורים של AND ו-OR אנו רגילים לקבל ערך בוליאני של אמת/שקר לעומת זאת בלוגיקה עמומה האופרטורים המוזכרים יוצרים פונקציות חברות חדשות המתאימות מידת שייכות לקבוצות החיתוך/איחוד בין קבוצות עמומות שונות.

לדוגמה: באיור מעלה, ניתן לראות בגרף השמאלי - שתי פונקציות חברות של שתי קבוצות עמומות על אותו מרחב פתרונות. פונקציות החברות מסוג גאוסיאן וניתן לראות כי ישנה חפיפה ביניהן. בגרף הימני – נראה את פונקציות החברות של קבוצות האיחוד והחיתוך המתאימות על פי האופרטורים שציינו קודם.

למשל: עבור נקבל

*ולכן:*

***עבור אופרטור* AND *:***

מה ההיגיון שעומד מאחור?

Table

Description automatically generatedהסבר מתמטי:

נביט בטבלת אמת עבור אופרטור AND ונראה בבירור כי ניתן לתאר את הפלט של האופרטור באמצעות פונקציית של הקלט.

הסבר על פי ההיגיון הבריא:

מכיוון שמידת החברות של 3 עבור קבוצה הינה חזקה מאוד ועבור קבוצה חלשה מאוד אז ההיגיון אומר שמידת האמון ש-3 שייך גם לזה וגם זה היא קטנה (מפני שהוא "נוטה" להיות שייך "רק" ל-A על סמך מידת החברות הגבוהה שלו).

**עבור אופרטור OR:**

Table

Description automatically generatedמה ההיגיון שעומד מאחור?

הסבר מתמטי:

נביט בטבלת אמת עבור אופרטור OR ונראה בבירור כי ניתן לתאר את הפלט של האופרטור באמצעות פונקציית של הקלט.

הסבר על פי ההיגיון הבריא:

אנו שואלים את עצמנו מה מידת האמון ש-3 שייך לקבוצה או לקבוצה ? מכיוון שמידת החברות של 3 עבור קבוצה הינה חזקה מאוד (בעצם שווה לערך מקסימלי של מידת חברות = 1) אז ניתן להגיד במידה רבה של אמון ש-3 אכן שייך או ל או לקבוצה .

**מערכת הסקה עמומה – Fuzzy inference:**

**חוקים:**

על סמך ההתניות, אותן אנו יודעים כבר לממש באמצעות האופרטורים העמומים, אנו יכולים לבנות מערכת של חוקים – **אם** (תנאי/ם מסויימ/ים) **אז** (מסקנה/ות)**.**

Diagram

Description automatically generatedלדוגמה:

בקבוצות רגילות, התנאי הוא דטרמיניסטי, אך מכיוון שמדובר בקבוצות עמומות, רמת הוודאות של תקבע את רמת השייכות של .

* מערכת הסקה עמומה עשויה לכלול מספר חוקים כאשר לכל חוק עשוי להיות מספר תנאים ומספר מסקנות.

למשל בהינתן שתי קבוצות עמומות ו- נשתמש בחוק לדוגמה שכתבנו קודם:

"if then "

שלבי ההסקה העמומה:

1. עימום – Fuzzification : הפיכת מספר חד (נקרא גם crisp) לערך עמום .
2. *הסקה : אנו נדרשים להטיל בצורה מסוימת את התנאי של על גבי . פעולה זו מתבצעת על ידי הטלה של קו אופקי החותך את ציר השייכות (ציר ה-y) של הקבוצה העמומה בדיוק בערך מידת החברות שהתקבלה לאחר האופרציות על התנאים. במקרה שלנו, קיים תנאי יחיד ולכן הערך המתקבל הינו פשוט . הקו המוטל נסמנו ב- .*

* *אם יש יותר מחוק אחד הרי שנקבל מספר ויש לקבוע מבניהן את הערך היחיד שישפיע. זה מתבצע באמצעות פעולה הנקראת צבירה (aggregation) הממומשת על ידי:*

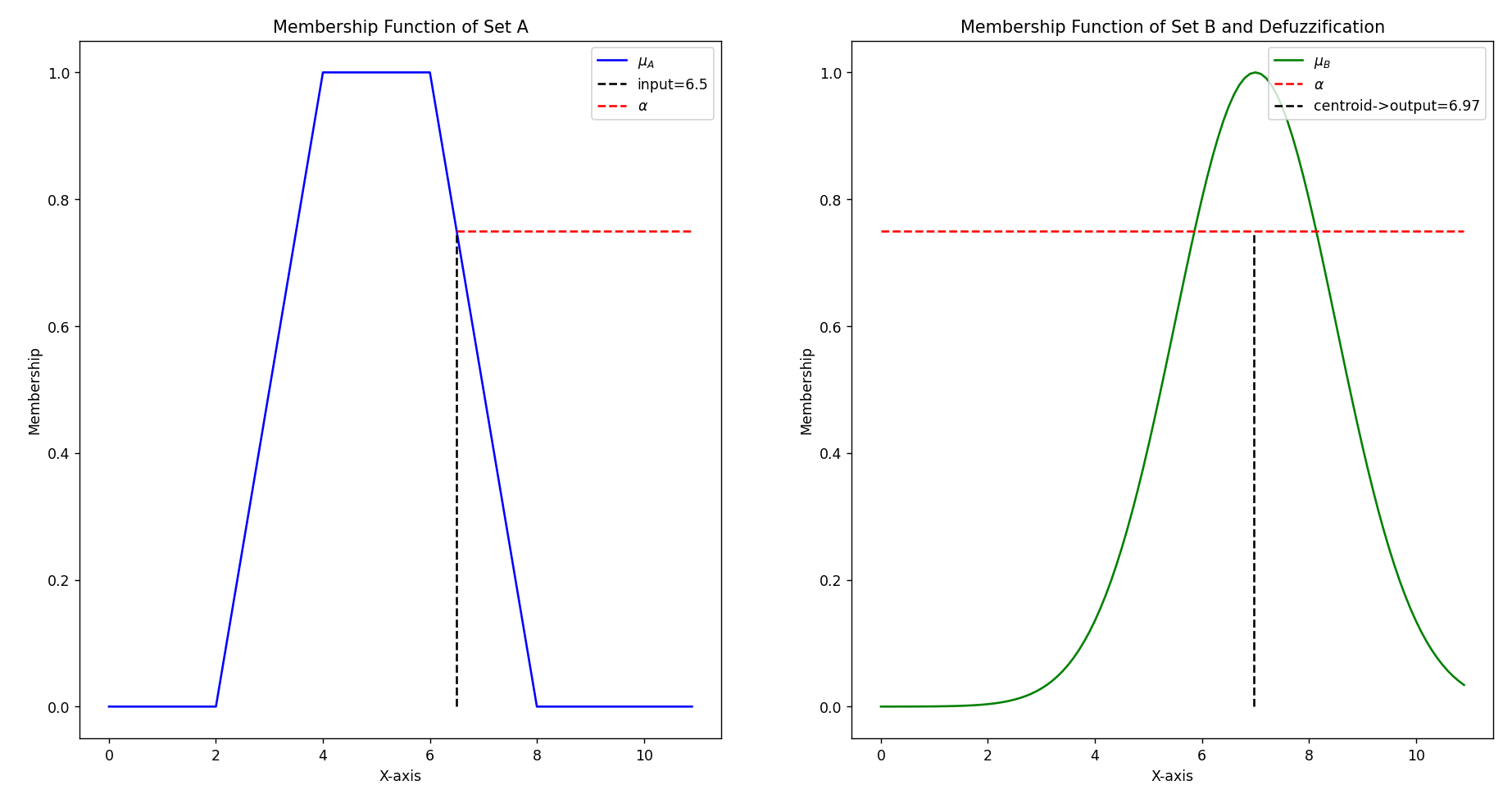
בסה"כ, הקו האופקי שיוטל על יהיה . ולבסוף מידת הוודאות תקבע על פי השטח הכלוא של מתחת ל- . ככל שהשטח גדול יותר, כך רמת הוודאות גדולה יותר.

1. ביטול עימום – de-Fuzzification : מיפוי ערך עמום למספר חד.

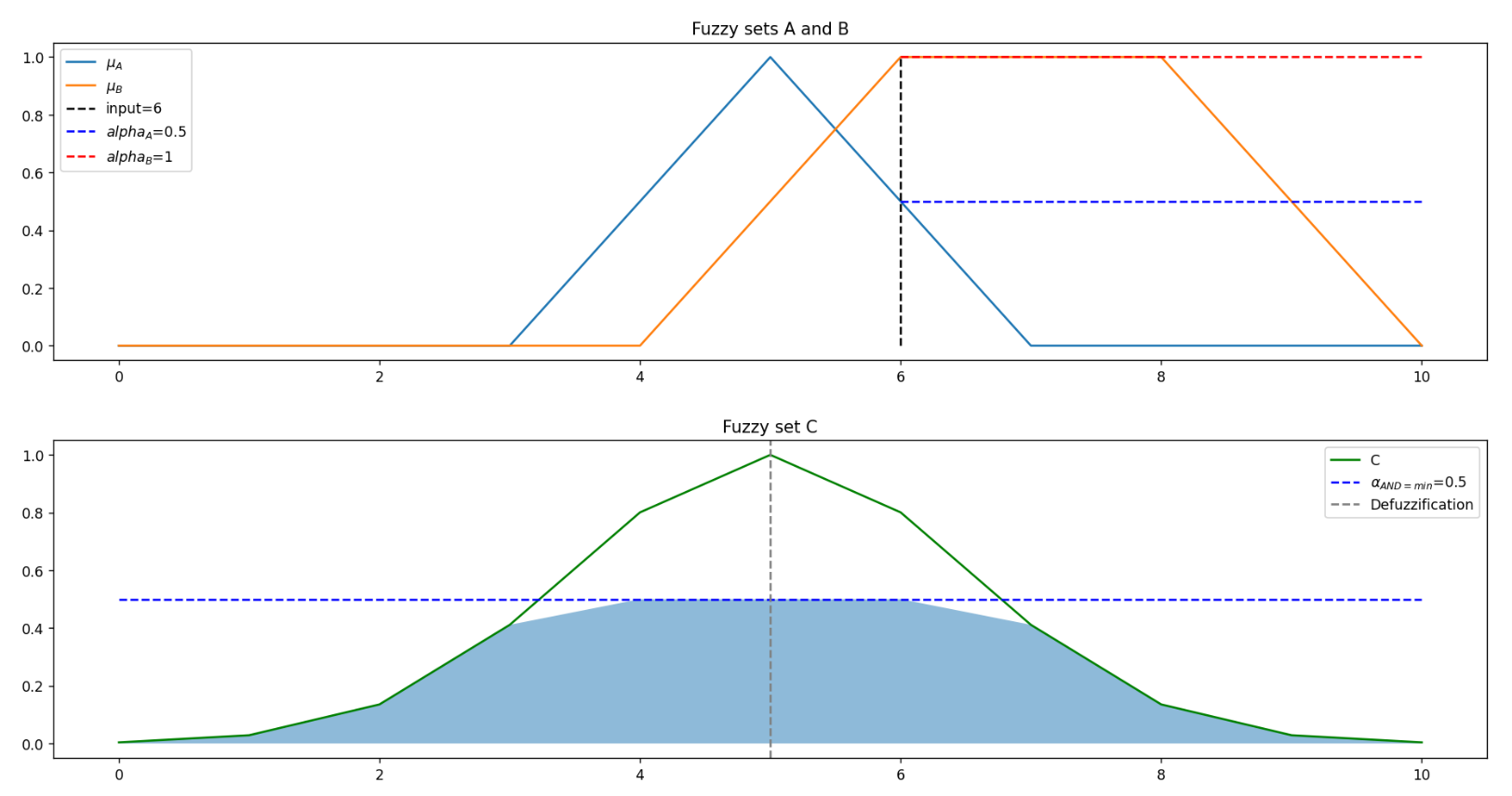
למשל בשיטת ה- **centroid** – נחשב את מרכז השטח הכלוא, נוריד אנך לציר ה-X על מנת לקבל את הערך החד של הפלט.

דוגמה למערכת הסקה של חוק אחד בעל תנאי אחד :

"if then "



דוגמה למערכת הסקה של חוק אחד בעל שני תנאים:

****"if AND then "

* כל השטח הכלוא צריך להיות צבוע. יש את החללים הריקים בפינות בעקבות מגבלות של הפונקציה שנעשה בה שימוש להצגה.